Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România — **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi — **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediţia a XIV-a
Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a XII -a

Problema 1..

a) Fie $a \in (1,+\infty)$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $\ln\left(f^2(x)+1\right)+a\cdot f(x)=x, \forall\, x\in\mathbb{R}$.

Să se demonstreze că funcţia f admite primitive.

Mihai Dragoş Totolici, profesor, Galaţi

b) Pe mulţimea M se defineşte o operaţie notată multiplicativ, cu proprietatea $x\cdot(y\cdot x)=y,\ \forall\, x,y\in M$. Să se demonstreze că fiecare din ecuaţiile $a\cdot x=b$ şi $x\cdot a=b$, unde $a, b\in M$, au soluţie unică în M.

$(***)$

Problema 2..

Fie f şi g două funcţii, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care satisfac relaţiile :

$$f(x+y)+f(x-y)=2\cdot f(x)\cdot g(y), \forall x,y\in\mathbb{R} \quad (1)$$

$$g(x-y)-g(x+y)=2\cdot f(x)\cdot f(y), \ \forall x,y\in\mathbb{R} \quad (2)$$

Ştiind că f este o funcţie neidentic nulă, să se demonstreze că:

a) Funcţia f este periodică dacă şi numai dacă funcţia g este periodică şi în acest caz mulţimile perioadelor sunt egale.

b) Dacă există $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, iar f este continuă, atunci funcţiile f şi g sunt derivabile şi $f'=g$, $g'=-f$.

Vasile Popa, profesor, Galaţi

Problema 3

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie convexă.

a) Demonstraţi că f este continuă.

b) Demonstraţi că există o funcţie $g:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, unic determinată, astfel încât $f(x+g(x))=f(g(x))-g(x)$, pentru orice $x\geq 0$.

$(***)$